Mathematik am Peutinger-Gymnasium

Wkt 7 **Grundwissen**

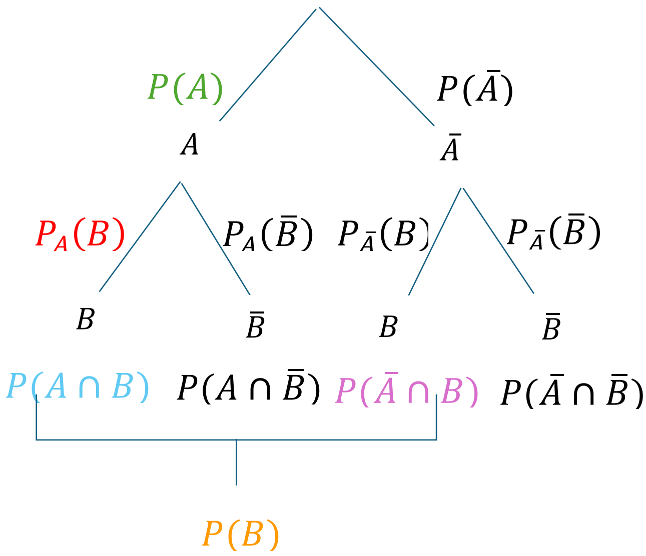
Bedingte Wahrscheinlichkeit und Stochastische Unabhängigkeit (Jgst. 11)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P_A(B)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt, unter der Bedingung, dass das Ereignis A bereits eingetreten ist.

Es gilt für $P(A) > 0$: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Baumdiagramm:



Vierfeldertafel:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt: $P_A(B) = P(B)$ und $P_B(A) = P(A)$.

Andernfalls nennt man A und B stochastisch abhängig.

Im Baumdiagramm können an den Ästen der zweiten Stufe $P_A(B)$ und $P_{\bar{A}}(B)$ durch $P(B)$ ersetzt werden. Analog können $P_A(\bar{B})$ und $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ durch $P(\bar{B})$ ersetzt werden.

Korrelation und Kausalität

Die stochastische Abhängigkeit von zwei Ereignissen bedeutet noch nicht, dass die Ereignisse sich auch direkt beeinflussen. Eine **Korrelation** liegt vor, wenn die Ereignisse **stochastisch abhängig** sind. Wird eine Korrelation zwischen zwei Ereignissen festgestellt, lässt sich daraus keine **Kausalität**, also ein ursächlicher Zusammenhang ableiten. Eine Korrelation kann nur ein Indiz dafür sein, dass eine Kausalität vorliegt.

Aufgaben

Aufgabe 1:

Von den 120 Schülerinnen und Schülern einer 11. Jahrgangsstufe werden die Ereignisse K: „Geht regelmäßig ins Kino“ und S: „Ist Mitglied in einem Sportverein“ untersucht. Eine Person wird zufällig bestimmt.

a) Ergänzen Sie die Vierfeldertafel:

	K	$\overline{K}$	
S			48
$\overline{S}$		68	
	24		120

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person
   (1) regelmäßig ins Kino geht.
   (2) sowohl regelmäßig ins Kino geht als auch Mitglied in einem Sportverein ist.
   (3) regelmäßig ins Kino geht, falls sie auch Mitglied in einem Sportverein ist.
   (4) weder gerne ins Kino geht noch Mitglied in einem Sportverein ist.
   (5) nur gerne ins Kino geht, aber nicht Mitglied in einem Sportverein ist.
   (6) nicht gleichzeitig gerne ins Kino geht und Mitglied in einem Sportverein ist.

Aufgabe 2:

Zwischen den Faschings- und den Osterferien hatte Andi bei 28 Schultagen an zwölf Tagen gefehlt. An acht Tagen fanden angekündigte Leistungsnachweise und Referate statt, von denen er nur einen verpasst hat. An einem Tag findet nur ein Leistungsnachweis bzw. Referat statt. Ein Tag wird zufällig ausgewählt. Weisen Sie nach, dass die Ereignisse A: „Andi ist anwesend“ und L: „Es findet ein angekündigter Leistungsnachweis statt“ stochastisch abhängig sind. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Aufgabe 3:

In einem Freizeitpark ist eine neue, besonders große Achterbahn eröffnet worden. 80% der Parkbesucher wollen mit dieser Achterbahn fahren. Von den Fahrern der Achterbahn sind 30% jünger als 15 Jahre. 14% aller Besucher des Freizeitparks wollen nicht mit der Achterbahn fahren und sind mindestens 15 Jahre alt.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Besucher jünger als 15 Jahre ist und nicht mit der Achterbahn fahren will.
b) Stellen Sie den Sachverhalt in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm und einer Vierfeldertafel dar. Wählen Sie „Achterbahn“ für das Ereignis der ersten Stufe.
c) Beschreiben Sie ein Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit über folgenden Term berechnet werden kann: $P(E) = \frac{0{,}14}{1-0{,}8}$.
d) Prüfen Sie, ob die Ereignisse „Achterbahn“ und „Besucher ist jünger als 15 Jahre“ stochastisch unabhängig sind.

Lösungen

Aufgabe 1:

a)

	K	$\overline{K}$	
S	20	28	48
$\bar{S}$	4	68	72
	24	96	120

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person

(1) regelmäßig ins Kino geht: $P(K) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

(2) sowohl regelmäßig ins Kino geht als auch Mitglied in einem Sportverein ist: $P(K \cap S) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

(3) regelmäßig ins Kino geht, falls sie auch Mitglied in einem Sportverein ist:

$$P_s(K) = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

(4) weder gerne ins Kino geht noch Mitglied in einem Sportverein ist:

$$P(\bar{K} \cap \bar{S}) = \frac{68}{120} = \frac{17}{30}$$

(5) nur gerne ins Kino geht, aber nicht Mitglied in einem Sportverein ist:

$$P(K \cap \bar{S}) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

(6) nicht gleichzeitig gerne ins Kino geht und Mitglied in einem Sportverein ist:

$$P(\overline{K \cap S}) = P(\bar{K} \cup \bar{S}) = P(\bar{K}) + P(\bar{S}) - P(\bar{K} \cap \bar{S}) = \frac{96}{120} + \frac{72}{120} - \frac{68}{120} = \frac{5}{6}$$

Aufgabe 2:

	A	$\bar{A}$	
L	7	1	8
$\bar{L}$	9	11	20
	16	12	28

$P(A) \cdot P(L) = \frac{16}{28} \cdot \frac{8}{28} = \frac{8}{49} \neq P(A \cap L) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

Daraus folgt, dass A und L stochastisch abhängig sind (Korrelation!).

Da $P_L(A) = \frac{7}{8} = 87{,}5\%$ deutlich größer ist als $P_{\bar{L}}(A) = \frac{9}{20} = 45\%$, ist Andi an Tagen mit Leistungsnachweisen mit höherer Wahrscheinlichkeit anwesend gewesen als an Tagen ohne Leistungsnachweis. Möglicherweise ist er an Tagen mit Leistungsnachweis in die Schule gegangen, obwohl es ihm nicht gut ging.

Aufgabe 3:

A: „Besucher will Achterbahn fahren."

J: „Besucher ist jünger als 15 Jahre."

a) $P(\bar{A} \cap J) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{J}) = 20\% - 14\% = 6\%$

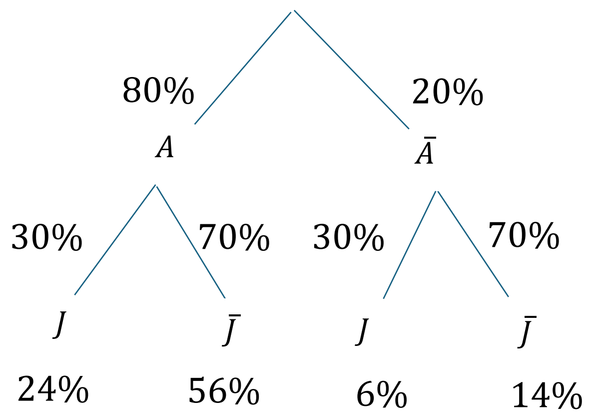
b) Vierfeldertafel:

	A	$\bar{A}$	
J	24%	6%	30%
$\bar{J}$	56%	14%	70%

Gegeben ist die bedingte W.: $P_A(J) = 30\% = \frac{P(A \cap J)}{P(A)}$

Daraus folgt: $P(A \cap J) = P_A(J) \cdot P(A) = 30\% \cdot 80\% = 24\%$

Baumdiagramm:



c) $P(E) = \frac{0{,}14}{1-0{,}8}$

Aus der Vierfeldertafel folgt: $P(E) = \frac{0{,}14}{1-0{,}8} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{J})}{P(\bar{A})} = P_{\bar{A}}(\bar{J})$

Ereignis E: „Ein Besucher, der nicht die Achterbahn fahren will, ist mindestens 15 Jahre alt."

d) Es gilt: $P(A \cap J) = P(J) \cdot P(A) = 30\% \cdot 80\% = 24\%$

Die Ereignisse A und J sind stochastisch unabhängig.
Die stochastische Unabhängigkeit erkennt man auch im Baumdiagramm, da die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der zweiten Stufe in den jeweiligen Teilbäumen gleich sind.