Ganzrationale Funktionen (Jgst. 10) – Verhalten im Unendlichen und Symmetrie

Ganzrationale Funktionen

Ein Term der Form $\boldsymbol{a_n x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$
mit den Koeffizienten $a_n;\ a_{n-1}\ ; \ldots ;\ a_2;\ a_1;\ a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ sowie $n \in \mathbb{N}$ heißt **Polynom**.
Eine Funktion, deren Term ein Polynom ist, heißt **ganzrationale Funktion** oder auch Polynomfunktion

$$f(x) = a_n x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

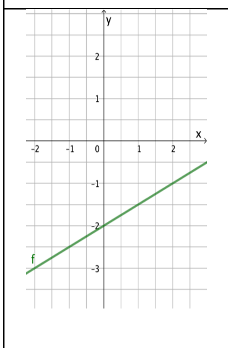
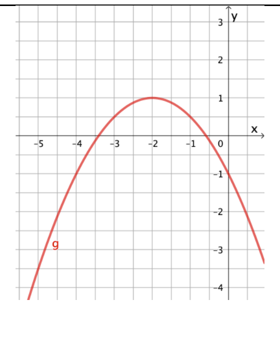
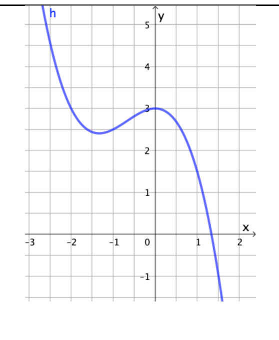
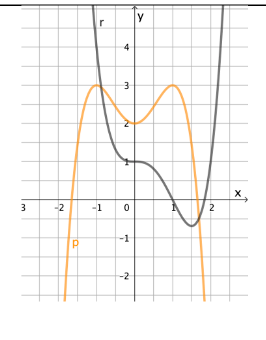
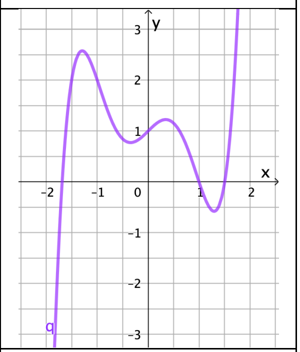
Der **Grad von f** (bzw. vom Polynom) ist *n*, also der Exponent der höchsten Potenz von x.
Die **Definitionsmenge** $D_f = \mathbb{R}$, weil es für x keine Einschränkungen gibt.

Auch ein Funktionsterm der Form $4x^2(x^3-1)$ ist Term einer ganzrationalen Funktion, Ausmultiplizieren ergibt ein Polynom vom Grad 5: $4x^2(x^3-1) = 4x^5 - 4x^2$.

Verhalten des Graphen für $x \to \pm\infty$

Das Verhalten der Graphen für $x \to \pm\infty$ hängt bei ganzrationalen Funktionen nur vom Summanden $\boldsymbol{a_n x^n}$ ab. Der Grad n bestimmt die grundlegende Form des Graphen, der Koeffizient $\boldsymbol{a_n}$ spiegelt den Graphen an der x-Achse, wenn $\boldsymbol{a_n}$ negativ ist.

Diese typischen Verläufe (Formen) sollte man kennen!

Grad 1 $f(x) = 0{,}5x - 1$	Grad 2 $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$	Grad 3 $h(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 3$	Grad 4 $p(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$ $r(x) = x^4 - 2x^3 + 1$	Grad 5 $q(x) = x^5 - 3x^3 + x + 1$
				
Gerade	Parabel	(liegende) S-Form	W- oder M-Form	S-Form

Ganzrationale Funktion mit **geradem Grad**:

Die Graphen der Potenzfunktionen $y = x^2;\ y = x^4$ ...usw. streben für $x \to \pm\infty$ stets nach $+\infty$.
Der Koeffizient a_n bewirkt eine Spiegelung an der x-Achse, wenn er negativ ist.

Ganzrationale Funktion mit **ungeradem Grad**

Die Graphen der Potenzfunktionen $y = x^3;\ y = x^5$ ...usw. streben für $x \to +\infty$ stets nach $+\infty$ und für $x \to -\infty$ stets nach $-\infty$.
Der Koeffizient a_n bewirkt auch hier eine Spiegelung an der x-Achse, wenn er negativ ist.

Bsp.: $g(x) = -0{,}5x^2 - 2x - 1$ hat den Grad 2
Weil $a_2 = -0{,}5 < 0$ d.h. negativ ist, gilt: für $x \to -\infty$ $geht\ f(x) \to -\infty$ und
für $x \to +\infty$ $geht\ f(x) \to -\infty$
Bei diesem Beispiel könnte man das Verhalten im Unendlichen natürlich auch damit begründen, dass der Graph eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Symmetrie von ganzrationalen Funktionen

Der Graph einer Funktion ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn gilt: $\boldsymbol{f(-x)=f(x)}$ für alle $x \in D_f$.

Beispiel: $f(x) = 2x^5 - 3x^3 - x$

$\boldsymbol{f(-x)} = 2(-x)^5 - 3(-x)^3 - (-x) = -2x^5 + 3x^3 + x = -(2x^5 - 3x^3 - x) = \boldsymbol{-f(x)}$,

Der Graph einer Funktion ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn gilt: $\boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$ für alle $x \in D_f$.

Beispiel: $g(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2{,}5$

$\boldsymbol{g(-x)} = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 2{,}5 = 3x^4 - 5x^2 + 2{,}5 = \boldsymbol{g(x)}$,

Kommen bei einer ganzrationalen Funktion nur gerade Exponenten (mit 0) bei x vor, so ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse. Man nennt solche Funktionen **gerade.**
Kommen bei einer ganzrationalen Funktion nur ungerade Exponenten bei x vor, so ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung. Man nennt solche Funktionen **ungerade.**

Aufgaben

1. Geben Sie den Grad der folgenden Terme an:

$g(x) = x^2(x^3-1)(2x^5+1)$ $\quad h(x) = x^2 - 12x^5 + 21x^7$ $\quad k(x) = x^2(x-1)(x+5)(x^2-4)$

2. Bestimme n Sie Grad und Verhalten im Unendlichen für:

$p(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$ $\quad r(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ $\quad h(x) = -0{,}5x^3 - x^2 + 3$

$q(x) = 2x^5 - 3x^3 - 1$ $\quad s(x) = -2(x-3)^5(x+1)^2$

3. Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten.

$a(x) = x^4 + x^3$ $\quad b(x) = -x(x^3 - 9x)$ $\quad c(x) = x^2(x-1)^2$ $\quad d(x) = -x^3(x^2 - x^4)$

Lösungen

Aufgabe 1
$g(x) = 2x^{10} + \cdots$ hat Grad 2+3+5=10; $\quad h$ hat den Grad 7; $\quad k$ hat den Grad 2+1+1+2=6

Aufgabe 2
$p(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$ hat den Grad 4 (siehe Abbildung).
Weil $a_4 = -1 < 0$ d.h. negativ ist (M-Form), gilt: für $x \to \pm\infty$ $geht$ $p(x) \to -\infty$.
$r(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ hat den Grad 4 (siehe Abbildung).
Weil $a_4 = 1 > 0$ d.h. positiv ist (W-Form), gilt: für $x \to \pm\infty$ $geht$ $r(x) \to +\infty$.
$h(x) = -0{,}5x^3 - x^2 + 3$ hat den Grad 3 (siehe Abbildung).
Weil $a_3 = -0{,}5 < 0$ d.h. negativ ist (S-Form), gilt:
für $x \to -\infty$ $geht$ $h(x) \to +\infty$, für $x \to +\infty$ $geht$ $h(x) \to -\infty$,
$q(x) = 2x^5 - 3x^3 - 1$ hat den Grad 5 (siehe Abbildung).
Weil $a_5 = 2 > 0$ d.h. positiv ist (S-Form), gilt: für $x \to -\infty$ $geht$ $q(x) \to -\infty$, für $x \to +\infty$ $geht$ $q(x) \to +\infty$.
$s(x) = -2(x-3)^5(x-1)^2 = -2x^7 + \cdots$ hat den Grad 7
Weil $a_7 = -2 < 0$ d.h. negativ ist (S-Form), gilt: für $x \to -\infty$ $geht$ $s(x) \to +\infty$, für $x \to +\infty$ $geht$ $s(x) \to -\infty$.

Aufgabe 3
$a(x) = x^4 + x^3$; $a(-x) = (-x)^4 + (-x)^3 = x^4 - x^3 \neq a(x)$ und $\neq -a(x)$. Daher keine Symmetrie zum KOSY.
$b(x) = -x(x^3 - 9x) = -x^4 + 9x^2$
entweder: $\boldsymbol{b(-x)} = -(-x)^4 + 9(-x)^2 = -x^4 + 9x = \boldsymbol{b(x)}$,
oder: Im Term $-x^4 + 9x^2$ kommen nur gerade Potenzen von x vor also ist G_b achsensymmetrisch zur y-Achse.
$c(x) = x^2(x-1)^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^4 - 2x^3 + x^2$
Im Term $x^4 - 2x^3 + x^2$ kommen sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von x vor,
also weist G_c keine von den beiden Symmetrien auf.
$d(x) = -x^3(x^2 - x^4) = -x^5 + x^7$
entweder: $\boldsymbol{e(-x)} = -(-x)^5 + (-x)^7 = +x^5 - x^7 = -(-x^5 + x^7) = \boldsymbol{-d(x)}$,
oder: Im Term $-x^5 + x^7$ kommen nur ungerade Potenzen von x vor, also ist G_d punktsymmetrisch zu Ursprung